Adı Soyadı: Cevap Anahtarı
Numarası:

10.05.2019

2018-2019 BAHAR YARIYILI ANALİZ II DERSİ 3.QUIZ SINAV SORULARI

Süre 45 dakikadır.

1) $J=\int_{-1}^{2}\left(x|3x+1|+\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]x^2\right)dx$ integralini hesaplayınız.

$|3x+1|$ için kritik nokta $-\frac{1}{3}$

$\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]$ için $x\in 2\mathbb{Z}$ olup

$$J=\int_{-1}^{-1/3}\left(x|3x+1|+\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]x^2\right)dx+\int_{-1/3}^{0}\left(x|3x+1|+\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]x^2\right)dx+$$

$$+\int_{0}^{2}\left(x|3x+1|+\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]x^2\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{-1/3}\left(x(-3x-1)+(-x^2)\right)dx+\int_{-1/3}^{0}\left(x(+3x+1)+(-x^2)\right)dx+\int_{0}^{2}x(3x+1)dx$$

$$=\frac{-68}{81}+\frac{-5}{162}+10$$

2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon ise f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir, gösteriniz.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ artan bir fonksiyon olsun. O zaman $f(b)-f(a)>0$ olup $\varepsilon>0$ sayısı için $\|P\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ o.ş. bir $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\mathbb{P}$ parçalanışını alalım.

$\forall k\in 1,2,\dots,n$ için $[x_{k-1},x_k]$ alt aralıklarda da f artan old. dan $m_k(f)=f(x_{k-1})$ ve $M_k(f)=f(x_k)$ dır.

Buradan

$$\hat{U}(f,P)-A(f,P)=\sum_{k=1}^{n}w_k(f).\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right].\Delta x_k$$

$$=(f(x_1)-f(x_0)).\Delta x_1+(f(x_2)-f(x_1)).\Delta x_2+\dots+(f(x_n)-f(x_{n-1})).\Delta x_n$$

$$\leq\|P\|\cdot(f(x_n)-f(x_0))=\|P\|\cdot(f(b)-f(a))<\varepsilon$$

dır. Yani $f\in\mathcal{R}([a,b])$ dir.

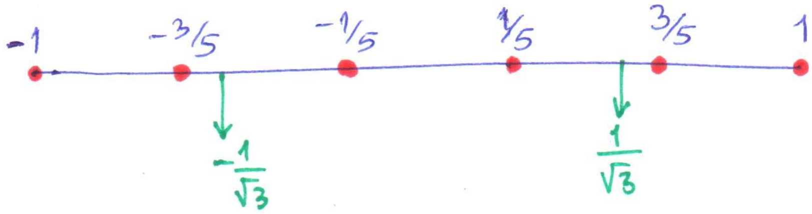
3) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x+1$ için $[-1,1]$ aralığının <u>6 elemanlı düzgün</u> bir P parçalanışına göre alt Darboux toplamını $A(f,P)$ – bulunuz.

$P\in\mathbb{P}$ için $s(P)=6$ ve P düzgün olduğundan 5 tane alt aralık oluşur ve $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\Delta x_4=\Delta x_5=\frac{2}{5}$ dir. O zaman $P=\{-1,-\frac{3}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5},1\}$ olur.

f'nin alt aralıklardaki monotonluğu için $f'(x)$ incelenirse

$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Buna göre

x		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$$A(f,P)=m_1(f).\Delta x_1+\dots+m_5(f).\Delta x_5$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\left[f(-1)+\min\left\{f\left(-\tfrac{3}{5}\right),f\left(-\tfrac{1}{5}\right)\right\}+f\left(\tfrac{1}{5}\right)+f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\tfrac{3}{5}\right)\right]$$

$$\cong 1{,}69244$$